**Tema 2.3. Varianza de Variables Aleatorias Discretas y Continuas.**

**Motivación del Tema.** Cuando un proyectil se lanza con un ángulo y es una variable aleatoria con función de densidad

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |



Sabemos entonces que el alcance del proyectil

es también una variable aleatoria y que tiene una función de densidad

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

y que el alcance esperado del proyectil es , pero ¿qué tan lejos están los alcances del alcance promedio ? Para medir esto introducimos el concepto de la **varianza del alcance** como:

Para amortiguar los cuadrados de las distancias de los a , sacamos la raíz cuadrada y así obtenemos la **desviación estándar** como:

Varianza pequeña Varianza Grande

**Definición 1.** Sea X una variable aleatoria con media y distribución de probabilidad:

**Finitas**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | **)** |

**Infinitas Contables**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

La **varianza** de X es:

* Para finitas:

* Para infinitas contables

La *desviación estándar de es:*

La interpretación de la desviación estándar es la siguiente, si a partir de la media nos movemos unidades hacia la izquierda y hacia la derecha entonces al menos el 75% de los datos van a estar en el intervalo . Esto lo podemos comprobar sumando las alturas de la función de densidad que caen en ese intervalo.

**Teorema 1.**

**Demostración:**  Desarrollando el cuadrado

Repartiendo la sumatoria

Utilizando y

**Ejemplo 1.** Sea X el número de veces que aparece cara cuando se lanza una moneda equilibrada 6 veces.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Calcule la varianza de .

**Solución.** Tomando en cuenta que la esperanza vale 3, si no sabe que es 3 ¡¡¡ calcúlela !!!, tenemos

= 1.5

Alternativamente por el Teorema 1

La desviación estándar es .

La interpretación de la desviación estándar es la siguiente, si a partir de la media nos movemos unidades hacia la izquierda y hacia la derecha entonces al menos el 75% de los datos van a estar en el intervalo . Esto lo podemos comprobar sumando las alturas de la función de densidad en 2, 3 y 4. Esta suma nos da 78%.

**Ejemplo 2.** Se lanza un par de dados equilibrados. Sean X y Y variables aleatorias definidas por y Las esperanzas son:

Encuentre la varianza y la desviación estándar de: (a) X, (b) Y.

**Solución.**

1. Primero se calcula

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

entonces

y

1. Primero se calcula de la siguiente manera:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

de donde

**y**

**Ejercicios.**

1. Sea una variable aleatoria con función de densidad

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1 | 0.4 |
| 2 | 0.3 |
| 3 | 0.2 |
| 4 | 0.1 |

Encuentre y

Respuesta: 2, 0.64 2, 4 y 1

1. La distribución de densidad para la demanda diaria ( número de veces utilizada ) para una herramienta es

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  | 0.1 | 0.5 | 0.4 |

Le cuesta a la fábrica $10.00 cada vez que se utiliza la herramienta. Encuentre la media y la varianza del costo diario por el uso de la herramienta.

Respuesta: 13, 41

1. Suponga que una tienda de abarrotes compra 5 envases de leche descremada a un precio de mayoreo de $1.20 por envase y revende la leche a $1.65 por envase. Después de la fecha de vencimiento, la leche que no se vendió se quita de los anaqueles y el tendero recibe un crédito del distribuidor igual a ¾ del precio de mayoreo. Si la función de densidad de la variable aleatoria , el número de envases que se vendieron es:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  |  |  |  |  |  |  |

Encuentre la ganancia esperada y su varianza.

Ayuda: termine de llenar la función de densidad de la ganancia

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 |  |  |  |  |
|  | -1.5 | -0.75 |  |  |  |  |

Por ejemplo, cuando vende solo una botella la ganancia es

Respuesta: 0.8, 1.31

1. Aproximadamente el 10% de las botellas de vidrio que salen de una línea de producción tienen defectos graves en el vidrio. Si se seleccionan, al azar, dos botellas, si es la variable aleatoria que cuenta el número de botellas con defectos encuentre (a) la función de densidad de , (b) la media y la varianza de .

Ayuda: Los valores de son 0,1,2 y , que la primera botella sea defectuosa y la segunda no o la primera no es defectuoso y la segunda si

Respuesta: (a)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  | 0.81 | 0.18 | 0.01 |

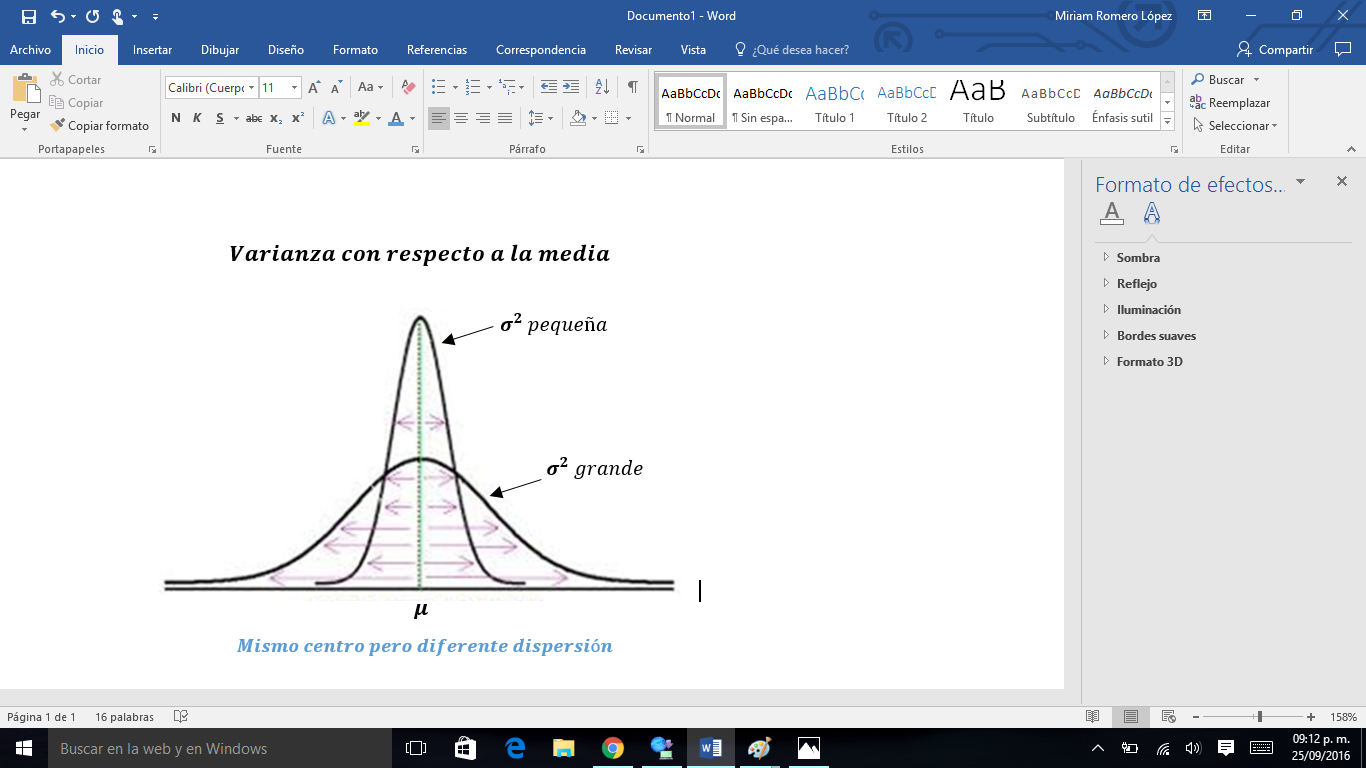
1. 0.2, 0.18

**Teorema 2.** Sea X una variable aleatoria y sean a y b constantes. Entonces

Hay dos casos especiales del Teorema 2

**(i).**

(ii)

**Ejemplo 3. Interpretación de la Varianza:**

**Definición 2. Variable Aleatoria Estandarizada.** Sea X una variable aleatoria con media y desviación estándar *La variable aleatoria estandarizada* Z se define como

**Teorema 3.** La variable estandarizada Z tiene media y desviación estándar .

**Ejemplo 4.** Supongamos que una variable aleatoria X tiene la siguiente distribución:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 2 | 4 | 6 | 8 |
|  | **0.1** | **0.2** | **0.3** | **0.4** |

1. Calcule la media y la desviación estándar .
2. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria estandarizada

, y muestre que y , como lo predijo el Teorema 3

**Solución.**

1. Se tiene:

Utilizando el Teorema 1, se obtiene:

1. Con la ecuación encontramos el recorrido de la variable aleatoria , mientras que los valores de la función de densidad se conservan , entonces se obtiene la siguiente distribución para Z:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| z | -2 | -1 | 0 | 1 |
|  | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

Entonces

Utilizando el Teorema 1 se obtiene:

**Tema 2.3 Varianza de Variables Aleatorias Continuas.**

**Definición 1.** Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad . La varianza de está definida por

La desviación estándar es

**Teorema 1.**

**Ejemplo 1.** Sea X una variable aleatoria con función de densidad

Calcular Var(X)

**Ejemplo 2.** Sea X una variable aleatoria con función de densidad

**Solución.**

**Ejemplo 3.** Una variable aleatoria tiene las 2 propiedades

y

Calcule y .

**Solución.** Desarrollando los cuadrados obtenemos

Aplicando las propiedades de la esperanza;

y

a las ecuaciones obtenemos

Restando a la primera ecuación la segunda obtenemos:

Mientras que sumándolas se obtiene:

De esta última ecuación obtenemos

Entonces

**Ejercicios.**

1. Demuestre el teorema 1, .
2. Demuestre las siguientes propiedades para una variable aleatoria continua

1. La proporción del tiempo, , que un autómata industrial trabaja durante una semana de 40 horas, es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad de probabilidad
2. Encuentre y , (b) la ganancia semanal, , para este autómata, está dada por , determine la ganancia esperada y qué tan exacta es la ganancia esperada.

Ayuda: Para (b) utilice el ejercicio 2.

Respuesta: (a) 2/3, 1/18, (b) 220/3, 20000/9.

1. La demanda semanal de gas propano( en miles de galones ) de una distribuidora es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad
2. Calcular y , (b) Si hay en existencia 1500 galones al comienzo de la semana y durante la semana no se pide más suministros, ¿cuánto de los 1500 galones se espera que queden al final de la semana?

Ayuda: para (b) considere , ¿qué es?

Respuesta: (a) 3-2ln(2), 12ln(2)-19/3-4ln(2)ln(2), (b) 636 galones